

Matematica per la Fisica

Docente: Silvia Penati

Prova Scritta del 2/10/2009

Problema 1

Calcolare, effettuando un prolungamento nel piano complesso, la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 25)^2}$$

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z^2 (z - 4)^2}$$

- 1) Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari.
- 2) Si calcoli il residuo per ciascuna singolarità isolata.

Problema 3

Si consideri l'operatore $A : \ell_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots\} = \{i\alpha_3, 0, -i\alpha_1, i\alpha_6, 0, -i\alpha_4, \dots\}$$

- 1) A é un operatore limitato?
- 2) Si scriva la rappresentazione matriciale di A .
- 3) Si studino proprietà di autoaggiuntezza e si determini lo spettro puntuale dell'operatore.

Problema 4

Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{C_r} \frac{1}{z(z-2/3)(z+2i)^2} dz$$

per i seguenti valori del raggio r della circonferenza C_r

- 1) $r = 1/2$
- 2) $r = 1$
- 3) $r = 4$

Problema 5

Sia dato l'operatore lineare $T : L^1(0, +\infty) \rightarrow L^1(0, +\infty)$ definito da

$$T(f)(x) = xf(x^2)$$

- 1) Dimostrare che l'operatore è ben definito e limitato.
- 2) Calcolarne la norma.

Problema 6

Si considerino i seguenti tre polinomi P_i nell'intervallo $[-1, 1]$.

$$P_1(x) = 1 \qquad P_2(x) = x \qquad P_3(x) = 3x^2 - 1$$

- 1) Sono mutualmente ortogonali?
- 2) Qual'è la loro norma?
- 3) Data la funzione $f(x) = \sin(\pi x)$, si calcoli quanto vale la proiezione di f sui P_i .